EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….018**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $(3+4i)^4$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 179^\circ$.

(4p) **c)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

(4p) **d)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(2, 3)$ și $B(3, 2)$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 3)$, $B(3, 2)$ și $C(4, 4)$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(1-2i)^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 3 și rația este 2 , să se calculeze termenul al patrulea .

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $n + 9 < 3^n$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$ are inversa $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $log_2(x^2 + 7) = 3$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma tuturor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X - 24$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = arctgx + arcctgx$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi funcția $f: M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$, $f(X)=AX-XA$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze $f(O_2)$ şi $f(I_2)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(aX)=af(X)$, $\forall X\in M_2(\mathbf{R})$ şi $\forall a\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(X+Y)=f(X)+f(Y)$, $\forall X,Y\in M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **e)** Să se găsească o bază a spațiului vectorial $(M_2(\mathbf{R}),+)$ peste corpul de scalari $(\mathbf{R},+,\cdot)$.

(2p) **f)** Să se arate că funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

(2p) **g)** Să se arate că $f(X)+f(Y)\neq I_2$, $\forall X,Y\in M_2(\mathbf{R})$

SUBIECTUL IV (20p)

(4p) **a)** Să se verifice că $\frac{1}{1-a}=1+a+\ldots+a^n+\frac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n\in\mathbf{N}$ şi $\forall a\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

(4p) **b)** Să se deducă relația

$$\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}=1-\sqrt[4]{x}+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-\ldots+(-1)^n\left(\sqrt[4]{x}\right)^n+(-1)^{n+1}\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}},\quad \forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

(4p) **c)** Să se arate că $0\le\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}}\le\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}$, $\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^b\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx=0$, $\forall b\in[0,1]$

(2p) **e)** Să se calculeze integrala $\int_0^b\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$, unde $b>0$.

(2p) **f)** Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{(-1)^1x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+\frac{(-1)^2x^{\frac{2}{4}+1}}{\frac{2}{4}+1}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{\frac{n}{4}+1}}{\frac{n}{4}+1}\right)=\int_0^x\frac{1}{1+\sqrt[4]{t}}\,dt,\quad \forall x\in[0,1].$$

(2p) **g)** Să se arate că există $x\in(0,1)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{(-1)^1x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+\frac{(-1)^2x^{\frac{2}{4}+1}}{\frac{2}{4}+1}+\ldots+\frac{(-1)^nx^{\frac{n}{4}+1}}{\frac{n}{4}+1}\right)\in\mathbf{Q}.$$